4.2.5 Orientovaný úhel II

Předpoklady: 4204

Minulá hodina
Orientovaný úhel $\Rightarrow$ rozlišujeme:

- směr otáčení (proti směru hodinových ručiček je kladný směr),
- počáteční rameno.

Každý úhel má nekonečně mnoho velikostí: $\ldots, -340°, 20°, 380°, 740°, \ldots$:

- nejmenší kladná velikost je základní,
- velikosti se od sebe liší o násobky $360°$.

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby si algoritmus na určení základní velikosti vymysleli sami. U stupňové míry s tím nejsou problémy. Při kontrole třetího příkladu si říkáme, jak najít výhodnější algoritmus, ale v žádném případě nikoho nenutím, aby se vzdal svého.

Př. 1: Urči základní velikost úhlu $1220°$.

$1220°$ není základní velikost (je to více než $360°$) $\Rightarrow$ zkusíme odečítat $360°$, abychom se k základní velikosti dostali:

- $1220° - 360° = 860°$ (příliš velké),
- $860° - 360° = 500°$ (příliš velké),
- $500° - 360° = 140°$ (to je ono).

Základní velikostí úhlu $1220°$ je $140°$.

Jak postupovat rychleji (odečítali jsme pořád to samé)?

$\frac{1220}{360} = 3{,}38\ldots \Rightarrow$ proto jsme odečítali třikrát.

$\alpha = 1220° - 3 \cdot 360° = 140°$

Trochu exaktněji.
Pro základní velikost musí platit $1220° = \alpha + k \cdot 360°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 1220° - k \cdot 360° \Rightarrow$ stačilo by od 1200 odečítat 360, dokud se nedostaneme do intervalu $\langle 0; 360)$. Je to ale moc zdlouhavé.

Zjistíme, kolik je k: $\frac{1220}{360} = 3{,}38\ldots \Rightarrow k = 3$.

Teď dosadíme: $\alpha = 1220° - k \cdot 360° = 1220° - 3 \cdot 360° = 140°$.

Pedagogická poznámka: Se třídou si kontrolujeme pouze výsledek ne postup. Někteří studenti používají v předchozím příkladě i ten nejprimitivnější postup postupného odčítání $360°$. Tento postup je už v příštím příkladu nepoužitelný.
Lepší studenti počítají i rychleji, třeba když si uvědomí, že zbytek po dělení velikosti úhlu 360 vzniká dělením základní velikosti úhlu. Stačí tedy, když zbytek po dělení vynásobí 360 a získají základní velikost:

$\frac{1220}{360} = 3,3\overline{8} \Rightarrow \alpha = 0,3\overline{8} \cdot 360° = 140°$.

Snažím se studenty přesvědčit, aby si našli rychlejší algoritmus, ale zároveň se snažím ho neprozrazovat.

Př. 2: Urči základní velikost úhlů: a) $15327°$ b) $662666°$.

a) Pro základní velikost musí platit: $15327° = \alpha + k \cdot 360° \Rightarrow \alpha = 15327° - k \cdot 360°$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{15327}{360} = 42,575... \Rightarrow k = 42$.

Teď dosadíme: $\alpha = 15327° - k \cdot 360° = 15327° - 42 \cdot 360° = 207°$.

b) Pro základní velikost musí platit $662666° = \alpha + k \cdot 360° \Rightarrow \alpha = 662666° - k \cdot 360°$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{662666}{360} = 1840,738... \Rightarrow k = 1840$.

Teď dosadíme: $\alpha = 662666° - k \cdot 360° = 662666° - 1840 \cdot 360° = 266°$.

Dodatek: Můžeme použít rychlejší postup:

$\frac{662666}{360} = 1840,738... \Rightarrow \alpha = 360 \cdot 0,738... = 266°$. Tento postup vychází z následujících úprav: $662666° = \alpha + k \cdot 360° \quad / : 360$

$$\frac{662666}{360} = \frac{\alpha}{360} + k \quad / -k$$

$$\frac{662666}{360} - k = \frac{\alpha}{360}$$

$$\left(\frac{662666}{360} - k\right) 360 = \alpha.$$

Můžeme si také uvědomit, že základní velikost u kladných úhlů se rovná zbytku po dělení 360. Desetinná místa, která po tomto dělení vzniknou pochází právě z tohoto zbytku a vynásobením 360 se dostaneme k hledanému zbytku.

Př. 3: Urči základní velikost úhlu $-2338°$.

Pro základní velikost musí platit $-2338° = \alpha + k \cdot 360° \Rightarrow \alpha = -2338° - k \cdot 360°$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{2338}{360} = 6,49... \Rightarrow k = -6$.

Teď dosadíme: $\alpha = -2338° - k \cdot 360° = -2338° - (-6) \cdot 360° = -178°$.

$-178°$ není základní velikost $\Rightarrow$ musíme ještě přičíst $360°$.

$\alpha = -178° + 360° = 182°$.

Postřeh: Prostým zopakováním postupu pro kladnou velikost jsme u záporné nezjistili základní velikost, ale největší zápornou velikost (neboli zápornou velikost s nejmenší absolutní hodnotou). Museli jsme pak ještě jednou připočítat $360°$. Připočítávání jsme si mohli ušetřit, kdybychom použili hodnotu $k = -7$ (o jednu menší neboli s absolutní hodnotou o jednu větší), abychom přičítali větší počet násobků $360°$.

Př. 4: Urči základní velikost úhlu $-589266°$.

Pro základní velikost musí platit $-589266° = \alpha + k \cdot 360° \;\Rightarrow\; \alpha = -589266° - k \cdot 360°$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{589266}{360} = 1636,85 \Rightarrow k = -1637$.

Teď dosadíme: $\alpha = -589266° - k \cdot 360° = -589266° - (-1637) \cdot 360° = 54°$.

$\alpha = 54°$

Dodatek: V obou předchozích příkladech můžeme používat i přímý výpočet pomocí zbytků:

$\frac{2338}{360} = 6,49... \Rightarrow 360 \cdot 0,49... = -178° \Rightarrow 182°$,

nebo $\frac{2338}{360} = 6,49... \Rightarrow 360 \cdot (1 - 0,49...) = 182°$.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou algoritmicky stejné jako předchozí, ale zlomky je činí pro studenty podstatně zajímavější. Velkým problémem bývalo zohledňování různých jmenovatelů při výpočtu. Při posledním průchodu, kdy jsem nechal studenty algoritmy na hledání základní velikosti samostatně vymyslet, byly problémy zdaleka nejmenší. Z toho soudím, že samostatně vyvinutý algoritmus vnímají studenti daleko neformálněji.

Př. 5: Urči základní velikost úhlu $\frac{317}{3}\pi$.

Pro základní velikost musí platit $\frac{317}{3}\pi = \alpha + k \cdot 2\pi \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{317}{3}\pi - k \cdot 2\pi \Rightarrow$ stačilo by od $\frac{317}{3}$ odečítat 2, dokud se nedostaneme do intervalu $\langle 0; 2)$, ale je to moc zdlouhavé.

$\alpha = \frac{317}{3}\pi - k \cdot \frac{6}{3}\pi$, přepsali jsme si 2π na třetiny, abychom mohli snadno odečítat ze zlomku. Zjišťujeme *k*, kolikrát se do $\frac{317}{3}$ vejde $\frac{6}{3}$, tedy kolikrát se do 317 vejde 6.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{317}{6} = 52,83... \Rightarrow k = 52$.

Teď dosadíme: $\alpha = \frac{317}{3}\pi - k \cdot \frac{6}{3}\pi = \frac{317}{3}\pi - 52 \cdot \frac{6}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$.

Základní velikost úhlu $\frac{317}{3}\pi$ je $\frac{5}{3}\pi$.

Př. 6: Urči základní velikost úhlu $\frac{7777}{4}\pi$.

Pro základní velikost musí platit $\frac{7777}{4}\pi = \alpha + k \cdot 2\pi \;\Rightarrow$

$\alpha = \frac{7777}{4}\pi - k \cdot 2\pi = \frac{7777}{4}\pi - k \cdot \frac{8}{4}\pi$ - jiný zlomek než v předchozím příkladě.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{7777}{8}=972{,}125 \Rightarrow k=972$.

Teď dosadíme: $\alpha=\frac{7777}{4}\pi-k\cdot\frac{8}{4}\pi=\frac{7777}{4}\pi-972\cdot\frac{8}{4}\pi=\frac{1}{4}\pi$.

Základní velikost úhlu $\frac{7777}{4}\pi$ je $\frac{1}{4}\pi$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad zadávám stejně jako předchozí a neupozorňuji na fakt, že se změnil jmenovatel zlomku (a proto se při zjišťování *k* dělí jiným číslem). Jde o jeden z velmi dobrých testů formálního přístupu k matematice. Pokud mají někteří studenti opravdu velké problémy s tím, že počítají s číslem π, ukažte jim, že všechny výpočty při převádění na základní velikost prakticky probíhají zcela bez tohoto čísla.

Př. 7: Urči základní velikost úhlu $\frac{91347}{6}\pi$.

Pro základní velikost musí platit $\frac{91347}{6}\pi=\alpha+k\cdot 2\pi \Rightarrow$

$\alpha=\frac{91347}{6}\pi-k\cdot 2\pi=\frac{91347}{6}\pi-k\cdot\frac{12}{6}\pi$ - jiný zlomek než v předchozím příkladě.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{91347}{12}=7612{,}25 \Rightarrow k=7612$.

Teď dosadíme: $\alpha=\frac{91347}{6}\pi-k\cdot\frac{12}{6}\pi=\frac{91347}{6}\pi-7612\cdot\frac{12}{6}\pi=\frac{3}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi$.

Základní velikost úhlu $\frac{91347}{6}\pi$ je $\frac{1}{2}\pi$.

Př. 8: Urči základní velikost úhlu $-\frac{221}{3}\pi$.

Pro základní velikost musí platit $-\frac{221}{3}\pi=\alpha+k\cdot 2\pi \Rightarrow$

$\alpha=-\frac{221}{3}\pi-k\cdot 2\pi=-\frac{221}{3}\pi-k\cdot\frac{6}{3}\pi$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{221}{6}=36{,}83... \Rightarrow k=-36$.

Teď dosadíme: $\alpha=-\frac{221}{3}\pi-k\cdot\frac{6}{3}\pi=-\frac{221}{3}\pi-(-36)\cdot\frac{6}{3}\pi=-\frac{5}{3}\pi$.

$-\frac{5}{3}\pi$ není základní velikost $\Rightarrow$ musíme ještě přičíst 2π.

$\alpha=-\frac{5}{3}\pi+2\pi=\frac{1}{3}\pi$

Základní velikost úhlu $-\frac{221}{3}\pi$ je $\frac{1}{3}\pi$.

Postřeh: Stejně jako u výpočtu ve stupňové míře je jednodušší použít hodnotu $k=-37$ (o jednu menší neboli s absolutní hodnotou o jednu větší), abychom přičítali větší počet násobků 2π.

Př. 9: Urči základní velikost úhlů: a) $-\frac{5621}{6}\pi$ b) $-\frac{5621}{4}\pi$.

a) Pro základní velikost musí platit $-\frac{5621}{6}\pi=\alpha+k\cdot 2\pi \Rightarrow$

$\alpha=-\frac{5621}{6}\pi-k\cdot 2\pi=-\frac{5621}{6}-k\cdot\frac{12}{6}\pi$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{5621}{12}=468,416....\Rightarrow k=-469$.

Teď dosadíme: $\alpha=-\frac{5621}{6}\pi-k\cdot\frac{12}{6}\pi=-\frac{5621}{6}\pi-(-469)\cdot\frac{12}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$.

Základní velikost úhlu $-\frac{5621}{6}\pi$ je $\frac{7}{6}\pi$.

b) Pro základní velikost musí platit $-\frac{5621}{4}\pi=\alpha+k\cdot 2\pi \Rightarrow$

$\alpha=-\frac{5621}{4}\pi-k\cdot 2\pi=-\frac{5621}{4}\pi-k\cdot\frac{8}{4}\pi$.

Zjistíme, kolik je *k*: $\frac{5621}{8}=702,625\Rightarrow k=-703$.

Teď dosadíme: $\alpha=-\frac{5621}{4}\pi-k\cdot\frac{8}{4}\pi=-\frac{5621}{4}\pi-(-703)\cdot\frac{8}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi$.

Základní velikost úhlu $-\frac{5621}{4}\pi$ je $\frac{3}{4}\pi$.

Př. 10: Petáková:
strana 40/cvičení 7 α) β) x_1) x_3) x_4)

Shrnutí: Orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí, které se liší o násobky 2π.